Chap 7 – La fonction logarithme népérien

Introduite en 1550 par l'écossais Neper sous forme de table numérique de correspondance qui transforme les produits en somme. Ne connaissant ni fonctions, ni limites, ni dérivées, il n'a donc pas pu définir exactement la fonction qui porte aujourd'hui son nom.

I. La fonction logarithme népérien :

1. Définition :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle]0 ; +∞[$= \mathbb{R}_*^+$. Cela signifie que pour tout $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Définition 1: On appelle **logarithme népérien du réel strictement positif a** l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue x. On note cette solution **$\ln(a)$: « logarithme népérien de a ».**

La fonction $\ln$: **]0 ; +∞[** $\longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction logarithme népérien.

$x \mapsto \ln(x)$

Propriété 1 : **Pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, $\ln(x) = a \Leftrightarrow e^a = x$**

Propriété 2 : $e^0 = 1$ donc ln (….) = ….. et $e^1 = e$ donc ln (….) = ….

Pour tout $x \in$ …………., $\ln(\exp(x)) = x$ ou encore $\ln(e^x) = x$

Pour tout $x \in$ ……………, $\exp(\ln(x)) = x$ ou encore $e^{\ln(x)} = x$

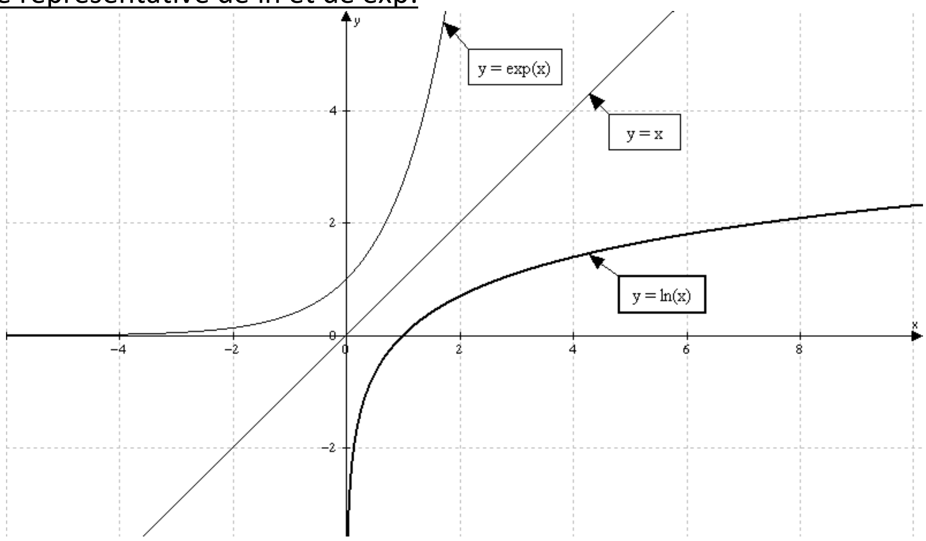
2. Etude de la fonction ln :

Propriété 3 :

- 1. $\ln$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$
- 2. $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- 3. approximation affine de $\ln$ autour de 1: pour x petit, $\ln(1 + x) = x + x\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ donc **$\ln(1 + x) \approx x$ pour x petit**
- 4. $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Conséquence : pour $a, b > 0$: $\boxed{a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)}$ et $\boxed{a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)}$

- 5. les courbes représentatives de $\ln$ et exp sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- 6. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ **et** $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- 7. Signe de $\ln x$: $\boxed{\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1}$ et $\boxed{\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1}$
- 8. Courbe représentative de ln et de exp:



Démonstration :

3. Propriété fondamentale du logarithme :

Propriété 4: Pour tout , $b > 0$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Démonstration :

Corollaire 5: *Propriétés de calcul du logarithme :* $a > 0,\ b > 0, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln(a) \qquad \ln(a^{-n}) = -\,n\ln a$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Démonstration :

Exemple 1 : Exprimer ln(9), ln(12) et ln($\sqrt{12}$) en fonction de ln(2) et ln(3).

Propriété 6: Si f est une fonction dérivable telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ et que $f'(1) = 1$, alors f est la fonction logarithme népérien.

Démonstration :

Remarque : $f(ab) = f(a) + f(b)$ est donc la relation fonctionnelle caractéristique du logarithme.

4. Autres propriétés :

Propriété 7: Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I, alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Remarque : Composer une fonction u par la fonction $\ln$ ne change pas son sens de variation. (expliquer pourquoi). Donc u et $\ln \circ u$ ont même sens de variation (c'est aussi vrai pour u et $\exp(u)$).

Propriété 8 : *Formes indéterminées avec ln à connaitre :* *croissances comparées :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \cdots \text{ (nombre dérivé de ln en 1)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

Démonstration :

Exercice 2 : Calculer $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ grâce au changement de variable $X = x - 1$.

Corollaire 9 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

Démonstration :

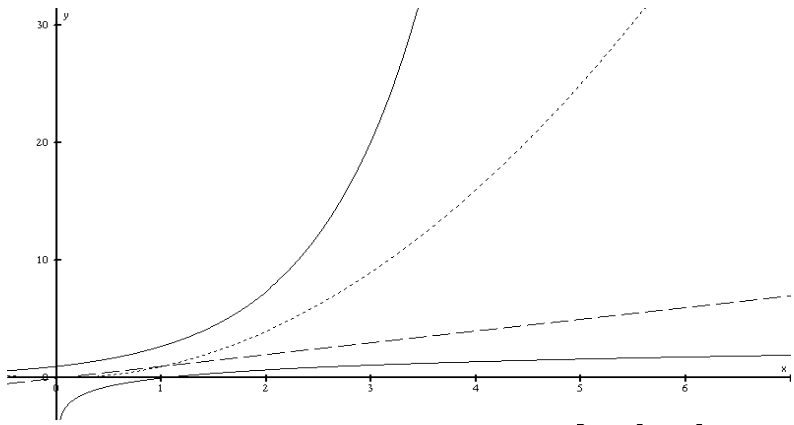
II. Croissances comparées des fonctions puissance, exponentielle et logarithme :

Les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, exp et $\ln$ ont toutes pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Peut-on comparer leur vitesse de convergence ? Laquelle va tendre plus vite vers $+\infty$?

Rappel des limites obtenues par croissance comparée : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

On retiendra que **en +∞, les puissances l'emportent sur le logarithme. De même, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x**. On peut aussi dire que en $+\infty$, x^n tend vers $+\infty$ plus vite que $\ln$ et moins vite que $\exp$.



Exercice 3 : En se servant des limites connues, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{4x^3-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+4x)\ln(x) \qquad \lim_{x\to 0}(x^2+4x)\ln(x)$$