

I. Rappels et compléments :**1. Définition de \mathbb{C} :****Théorèmes** (admis)

Il existe un ensemble \mathbb{C} appelé **ensemble des nombres complexes** vérifiant les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} contient \mathbb{R}
- Il existe dans \mathbb{C} un élément i tel que : $i^2 = \dots\dots$
- Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans \mathbb{R}

Définition

- L'écriture $z = a + ib$, a et b sont deux réels, s'appelle écriture
ou de z
- $a = \text{Re}(z)$ est la partie de z
- $b = \text{Im}(z)$ est la partie de z

Propriétés

Soit z un nombre complexe. On a :

- z est réel $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- z est imaginaire $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Propriétés (égalité de deux nombres complexes)

- Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes (a_1, b_1, a_2 et $b_2 \in \mathbb{R}$).

Alors

z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si $\dots\dots\dots$

- En particulier, $z = a + ib = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Attention

- l'écriture $z = a + ib$ ne désigne une forme algébrique que si a et b sont
.....
- Les nombres complexes n'ont pas de signe c.-à-d. il n'y a pas de comparaison entre les nombres complexes
- La partie imaginaire de $a + ib$ est et non ib

*** Application :**

(1) Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + 3i - (5 - 4i) ; z_2 = (1 + 2i)(2 - 3i) ; z_3 = (1 + i)^2 ; z_4 = (1 - i)^2 ;$$

$$z_5 = (4 + 2i)^3 \text{ et } z_6 = 2i - 3$$

(2) a) Calculer :

$$\begin{array}{lll} i^1 = \dots & i^5 = \dots & i^9 = \dots \\ i^2 = \dots & i^6 = \dots & i^{10} = \dots \\ i^3 = \dots & i^7 = \dots & i^{11} = \dots \\ i^4 = \dots & i^8 = \dots & i^{12} = \dots \end{array}$$

b) En déduire i^n suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$

c) Calculer alors i^{2020} et i^{2021}

- (3) a) Montrer que $i^{-1} = -i$
 b) En déduire que $i^{-n} = (-1)^n i^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
 c) Calculer i^{-4155}

2. Nombres complexes conjugués :

Définition

Soit $z = a + ib$; a et $b \in \mathbb{R}$

Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = \dots\dots\dots$

Propriétés

- $\overline{z + z'} = \dots\dots\dots$, pour tout z et $z' \in \mathbb{C}$
- $\overline{\bar{z}} = \dots\dots\dots$, pour tout $z \in \mathbb{C}$
- $z + \bar{z} = \dots\dots\dots$; $z - \bar{z} = \dots\dots\dots$, pour tout $z \in \mathbb{C}$
- pour tout $z \in \mathbb{C}$
 (z est réel) si et seulement si ($\bar{z} = \dots\dots$)
 (z est imaginaire pur) si et seulement si ($\bar{z} = \dots\dots$)
- $\overline{z \times z'} = \dots\dots\dots$, pour tout z et $z' \in \mathbb{C}$
- $\overline{z^n} = \dots\dots\dots$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \dots\dots\dots$; $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \dots\dots\dots$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dots\dots\dots$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$
- si $z = a + ib$ (a et $b \in \mathbb{R}$) alors $z\bar{z} = \dots\dots\dots$

Remarque

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$; $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

Cette écriture permet de mettre $\frac{1}{z}$ sous la forme algébrique

Exemple : Mettre sous forme algébrique $z = \frac{4+2i}{1+i}$

* A faire : Exercices 1 et 2 page 19

3. Affixe d'un point – affixe d'un vecteur :

Définition

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

- ☒ A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut lui associer un point unique $M(a, b)$, appelé point $\dots\dots\dots$ et on le note $M(z)$.
- ☒ A tout point $M(a, b)$ du plan, on peut lui associer un unique nombre complexe $z = \dots\dots\dots$, appelé $\dots\dots\dots$ de M. On le note z_M .

Remarques

1. La notation $M(z)$ se lit alors «M $\dots\dots\dots$ z».
2. Le nombre complexe $z = 0$ a pour image le point $\dots\dots$

Théorème

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

- ☒ A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut lui associer un vecteur unique $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, appelé vecteur et on le note $\vec{w}(z)$.
- ☒ A tout vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ du plan, on peut lui associer un unique nombre complexe $z = \dots\dots\dots$, appelé de \vec{w} . On le note $z_{\vec{w}}$ ou $aff(\vec{w})$.

Remarques

1. Le complexe $z = 0$ a pour image le vecteur
2. Deux points du plan sont confondus si et seulement si
3. z est réel si et seulement si $M(z)$ appartient à l'axe
4. z est imaginaire pur si et seulement si $M(z)$ appartient à l'axe

Propriétés

1. Si I est le milieu de $[AB]$ alors $z_I = \dots\dots\dots$
2. $\vec{w} = \vec{w}'$ si et seulement si
3. $aff(\overrightarrow{AB}) = \dots\dots\dots$
4. $aff(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \dots\dots\dots ; (\alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R})$

Propriétés

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$

1. \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si
2. \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si

A faire : exercice 8 page 19

4. Module d'un nombre complexe :**Définition**

On appelle module d'un nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le réel positif noté $|z|$ définie par :

$$|z| = \dots\dots\dots$$

Interprétation géométrique

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

1. Soit $M(z)$; $|z| = \dots\dots\dots$
2. Pour tout points A et B d'affixes respectives z_A et z_B : $AB = \dots\dots\dots$

Applications :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

- a) $|z - 1 + i| = 2$
- b) $|z - 2i| = |z + 3i|$

Propriétés

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ <ul style="list-style-type: none"> • $z\bar{z} = \dots\dots\dots$ • $\bar{z} = \dots\dots\dots$ • $-z = \dots\dots\dots$ • $z = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ • pour tout réel λ : $\lambda z = \dots\dots\dots$ 	Pour tous nombres complexes z et z' <ul style="list-style-type: none"> • $z + z' \leq \dots\dots\dots$ • $z \times z' = \dots\dots\dots$ • $z^n = \dots\dots\dots ; (n \in \mathbb{N}^*)$ 	Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $z' \in \mathbb{C}$ <ul style="list-style-type: none"> ■ $\left \frac{1}{z} \right = \dots\dots\dots$ ■ $\left \frac{z'}{z} \right = \dots\dots\dots$
---	---	---

• Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

■ $\left| \frac{1}{z^n} \right| = \dots \dots \dots ; (n \in \mathbb{Z})$

* **Application :** activité 7 page 10

* **A faire :** exercice 9 page 19

5. Argument d'un nombre complexe non nul :

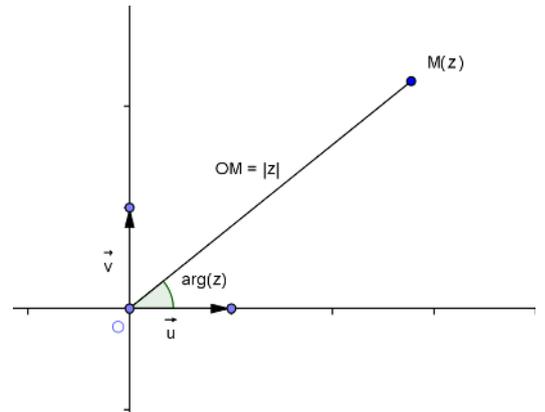
Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et M son image

On appelle argument de z, on note $\dots \dots \dots$, toute mesure en radian de l'angle $\dots \dots \dots$

On note $\dots \dots \dots \equiv \dots \dots \dots [2\pi]$



Exemples

$\arg(1 + i) \equiv \dots \dots [2\pi]$; $\arg(2i) \equiv \dots \dots [2\pi]$; $\arg(-3) \equiv \dots \dots [2\pi]$; $\arg(-1 - i) \equiv \dots \dots [2\pi]$
 $\arg(1) \equiv \dots \dots [2\pi]$; $\arg(-1) \equiv \dots \dots [2\pi]$; $\arg(i) \equiv \dots \dots [2\pi]$; $\arg(-i) \equiv \dots \dots [2\pi]$

Remarques

- 1) 0 n'a pas d'argument.
- 2) Deux arguments d'un même nombre complexe non nul diffèrent d'un multiple de 2π
 Si α et β sont deux arguments de z, on a : $\alpha \equiv \beta [2\pi]$

Propriétés (P1)

1. a) z est réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots \dots [2\pi]$
 b) z est réel strictement négatif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots \dots [2\pi]$
 c) z est réel non nul $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots \dots [\dots \dots]$
2. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots \dots [\dots \dots]$
 a) $y \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(iy) \equiv \dots \dots [2\pi]$
 b) $y \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(iy) \equiv \dots \dots [2\pi]$

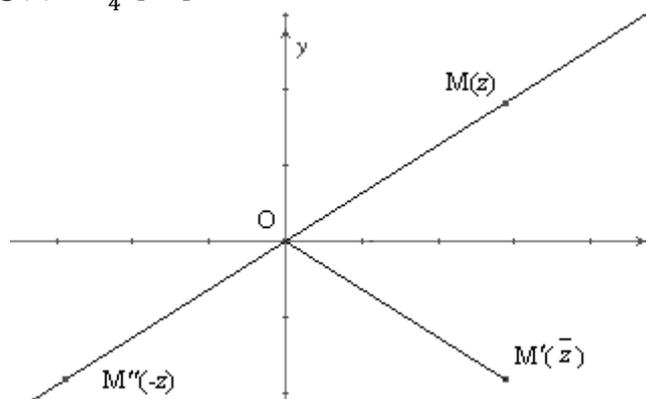
Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

Propriétés (P2)

- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(\bar{z}) \equiv \dots \dots \dots [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \dots \dots \dots [2\pi]$
- $\arg(\alpha z) \equiv \dots \dots \dots [2\pi]$
- $\arg(-\alpha z) \equiv \dots \dots \dots [2\pi]$



Propriétés (P3)

$$\arg(z_B - z_A) \equiv \dots \dots \dots [2\pi]$$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit les points $A(4,1)$ et $B(3,2)$

Trouver une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

* **A faire : exercice 12 page 20**

6. Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :**Théorème**

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = \dots \dots$ et $\theta \equiv \dots \dots \dots$

Réciproquement : si le nombre complexe z s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $r = \dots \dots$ et $\theta \equiv \dots \dots \dots$

Définition

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ s'appelle de z

On note aussi : $z = [r, \theta]$

Exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$. Trouver la forme trigonométrique de z
2. Soit $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver la forme trigonométrique de z

Propriété

Pour tout z et $z' \in \mathbb{C}^*$: $z = z' \Leftrightarrow |z| = \dots \dots \dots$ et $\arg(z) \equiv \dots \dots \dots$

Propriété (relation entre forme algébrique et forme trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r > 0$), on a :

$$r = \dots \dots = \dots \dots \dots ; \cos\theta = \dots \dots \text{ et } \sin\theta = \dots \dots$$

Exercice

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} ; z_2 = -8 + 8i$$

Propriétés

- 1) $[r, \theta] \times [r', \theta'] = \dots \dots \dots ; \arg(zz') \equiv \dots \dots \dots$ pour tous z et $z' \in \mathbb{C}^*$
- 2) $\frac{1}{[r, \theta]} = \dots \dots \dots ; \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \dots \dots \dots$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$
- 3) $\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \dots \dots \dots ; \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \dots \dots \dots$ pour tous z et $z' \in \mathbb{C}^*$
- 4) $[r, \theta]^n = \dots \dots \dots ; \arg(z^n) \equiv \dots \dots \dots$; pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$
- 5) Si $z = [r, \theta]$ alors $-z = \dots \dots \dots$ et $\bar{z} = \dots \dots \dots$

Application :

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique
2. Soit $z = \frac{z_1}{z_2}$. donner l'écriture trigonométrique puis l'écriture algébrique de z
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

* **A faire : activité 14 page 13**

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe :

Notation

On désigne par $e^{i\theta}$, on lit **exponentielle $i\theta$** , le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = [1, \theta]$$

Exemples

$$e^{i0} = \dots\dots ; e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots\dots ; e^{i\pi} = \dots\dots ; e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots\dots$$

* **Activité 2 page 14 :**

Propriétés

Pour tout θ et $\theta' \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \dots\dots\dots ; \frac{1}{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots ; \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \dots\dots\dots ; (e^{i\theta})^n = \dots\dots\dots (n \in \mathbb{Z})$$

$$\overline{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots ; -e^{i\theta} = \dots\dots\dots ; e^{i(\theta+2k\pi)} = \dots\dots\dots (k \in \mathbb{Z})$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = [r, \theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta), r > 0$

La **forme exponentielle** de z est donc $z = \dots\dots\dots$

Application :

Ecrire sous forme exponentielle :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{4}} ; z_3 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{37} ; z_4 = ie^{i\frac{\pi}{5}}$$

* **A faire : exercices 17,18 et 24 pages 20 et 21**

III. Nombres complexes et trigonométrie :

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$(cos\theta + isin\theta)^n = \dots\dots\dots$$

Application :

Exprimer $cos4x$ et $sin4x$ en fonction de $cosx$ et $sinx$

↪ **Rappels**

- **Formule du Binôme de Newton**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}b^k = \dots\dots\dots$$

Où $C_n^k = \dots\dots\dots$

Exemple : $(a + b)^4 = \dots\dots\dots$

$$= \dots\dots\dots$$

- **Triangle de Pascal**

n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1
⋮						

Exemple : $(a + b)^5 = \dots\dots\dots$

Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application :

Linéariser $\cos^5 x ; x \in \mathbb{R}$

Remarque exercice 22 page 21

* **A faire : exercice 25 page 21**