Exercice 1

Soit f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5} & si\ x \neq 5 \\ f(5) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

1. Préciser le domaine de définition D de f.
2. a. Montrer que f est continue en 5.
   b. Justifier que f est continue sur D.
   c. Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}-3 & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{-2x+2}{x-2} & si\ x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D_f
2. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine
3. Montrer que f est continue sur son domaine D_f
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha \in]-4,-3[$

Exercice 3

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = x\sin x + \cos x - 1$ sur $[0,\pi]$
   a. Etudier les variations de g
   b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$. Déduire le signe de $g(x)$
2. Soit $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$. Montrer que $f(\alpha) = \sin\alpha$

Exercice 4

Donner l'image de l'intervalle I par la fonction f:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; $I =]-1,4]$

$f(x) = \dfrac{3x-4}{x+1}$; $I =]-\infty,1[$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $I = [-1,2[$

$f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$; $I = \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$

Exercice 5 ☺

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$.
   b) En déduire la limite de f à droite en 0.
   c) Etudier la continuité de f en 0.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1,0[$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Calculer ces limites :

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{x-1}{x^2+2}\right)$

Exercice 6 ☺

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - sinx}{x-1}$$

1) a) Démontrer que pour tout $x > 1$, $f(x) \geq x + 1$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$
2) Déterminer la limite de f en $-\infty$

B) Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x - sinx}{x-1}$$

Déterminer la limite de g en $+\infty$

Exercice 7 ☺

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x\sin x}{x^2+1} & si\ x > 0 \\ x^3 + x + 1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

1- Déterminer le domaine de définition de f.
2- Montrer que f est continue en 0.
3- a- Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{1-x}{x^2+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1+x}{x^2+1}$.
   b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
4- a- Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$.
   b- Déterminer $f(]-\infty, 0])$.
   c- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une unique solution α puis vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

Exercice 8 ☺

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} & si\ x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 - 1 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x} - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2- a- Montrer que, pour tous $x > 0$; $-1 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x} - 1$.
   b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3- Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.
4- a- Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in]-1,0[$.
   b- Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5- Déterminer, <u>en justifiant la réponse</u>, les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-\sqrt{x}\right)$