

I. Rappels :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D

- ✓ On ne peut pas étudier la limite de f en x_0 que lorsque $x_0 \in D$ ou bien $x_0 \notin D$ mais x_0 est une borne de D
- ✓ Trouver la limite de f en x_0 , c'est étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de x_0

on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou $\lim_{x_0} f$

1. Théorèmes :

- a) Si une fonction admet une limite alors cette limite est
- b) Soit x_0 un réel ; $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = l \Leftrightarrow \lim_{x_0} f = \dots\dots$

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|}$

- 1) Déterminer $\lim_{1^+} f$ et $\lim_{1^-} f$
- 2) La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

2. Limites de fonctions trigonométriques :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots\dots ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \dots\dots \quad (a \in \mathbb{R}) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \dots\dots ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \dots\dots ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \dots\dots ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \dots\dots \quad (a \in \mathbb{R})$$

3. Opérations sur les limites :

On admet les théorèmes résumés dans les tableaux (T₁), (T₂) et (T₃) suivants et concernant la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions

Soient x_0, l et l' des réels

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de centre x_0 ou sur $I \setminus \{x_0\}$ ou sur un intervalle du type $]a, +\infty[$ ou sur un intervalle du type $]-\infty, a[$ (a est un réel)

Quand le réel x tend vers x_0 ou vers x_0^+ ou vers x_0^- ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on a les résultats consignés dans les tableaux suivants :

- **Tableau (T₁)** relatif à la limite d'une **somme** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f + g$ a pour limite
l	l'	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

- **Tableau (T₂)** relatif à la limite du **produit** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f \times g$ a pour limite
l	l'	
$l > 0$	$+\infty$	
$l > 0$	$-\infty$	
$l < 0$	$+\infty$	
$l < 0$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	

$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
0	$+\infty$ ou $-\infty$	

Remarque : ces résultats se généralisent à une somme finie ou à un produit fini de fonctions

- **Tableau (T3)** relatif à la limite du **quotient** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $\frac{f}{g}$ a pour limite
l	$l' \neq 0$	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$l' > 0$	
$+\infty$	$l' < 0$	
$-\infty$	$l' > 0$	
$-\infty$	$l' < 0$	
$l > 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l > 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
0	0	
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	

4. Théorèmes :

a) Soit f une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots\dots\dots$

b) Soit g une fonction rationnelle : $g(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ ($a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$)
Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \dots\dots\dots$

5. Théorème :

$l \in \mathbb{R}$

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert D , sauf peut être en un réel x_0 de D .

a) Si $\lim_{x_0} f = l$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \dots\dots$

b) Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$)

a) Si $\lim_{+\infty} f = l$ alors $\lim_{+\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

b) Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors $\lim_{+\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ($a \in \mathbb{R}$)

a) Si $\lim_{-\infty} f = l$ alors $\lim_{-\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

b) Si $\lim_{-\infty} f = +\infty$ alors $\lim_{-\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

* **Application : Activité 7 page 8**

6. Continuité en un point x_0 :**Théorème 1**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \dots\dots\dots$

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut être en $x_0 \in I$

S'il existe une fonction g définie sur I , continue en x_0 et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots\dots\dots$

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en $x_0 \in I$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$ (l fini) alors la fonction g définie sur I par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$ est

.....

On dit que f est, et que g son

.....

* **Application : Activité 3 page 7**

7. Continuité à gauche - continuité à droite :**Théorèmes**

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + h[$ ($h > 0$)
 f est continue à droite en x_0 si et seulement si

b) Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - h, x_0]$ ($h > 0$)
 f est continue à gauche en x_0 si et seulement si

c) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0
 f est continue en x_0 si et seulement si

* **Application : Activité 4 page 7**

8. Continuité sur un intervalle :

Théorèmes a et b sont deux réels tels que $a < b$

a) Une fonction f est continue sur $]a, b[$ si et seulement si

b) f est continue sur $[a, b[$ si et seulement si

c) f est continue sur $]a, b]$ si et seulement si

d) f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si

Retenons

1. Toute fonction polynôme est continue sur
2. Toute fonction rationnelle est continue sur
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur
4. Les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ sont continues sur ($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$)
5. La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur
6. La fonction $x \mapsto \cotan x$ est continue sur

9. Théorèmes :

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors :

- a) αf ($\alpha \in \mathbb{R}$); $|f|$; $f + g$; $f \times g$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont
- b) Si de plus g alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0
- c) Si de plus $f(x_0) > 0$ alors \sqrt{f} est continue en x_0

* **Application :** *Activité 6 page 7*

II. Continuité et limite d'une fonction composée :

1. Composée de deux fonctions :

* **Activité 1 page 9 :**

↪ La fonction h se note $g \circ f$ et on lit **g rond f**

La fonction k se note $f \circ g$ et on lit

On remarque que : $g \circ f \dots \dots f \circ g$

Définition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles I et J tel que $f(I) \subset J$

La fonction, notée $g \circ f$, définie sur I , par $g \circ f(x) = \dots \dots \dots$ s'appelle **fonction composée** de f et g

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

- 1) Déterminer les domaines de définitions de : f , g , $g \circ f$ et $f \circ g$.
- 2) Expliciter $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$

* **Application :** *Activité 2 page 9*

2. Continuité d'une fonction composée :

Théorème (admis)

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles ouverts I et J contenant respectivement x_0 et $f(x_0)$

Si et alors $g \circ f$ est continue en x_0

Corollaire

Si } alors $g \circ f$ est continue sur I

* **Application :** *Activité 3 page 9*

3. Limite d'une fonction composée :

Théorème (admis)

Soit f et g deux fonctions

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f = \dots \dots (a, b$ et c finis ou infinis)

Exemple : $h(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = ?$

* **A faire :** *Exercice 12 page 20*

III. Limites et ordre :

Théorèmes

Soit f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I

x_0 désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$; l et $l' \in \mathbb{R}$

- ✓ Si $f(x) \leq g(x)$; $x \neq x_0$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g = l'$ alors
- ✓ Si $f(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$ alors $l \geq 0$
- ✓ Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g = \lim_{x \rightarrow x_0} h = l$ (l fini) alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$
- ✓ Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$
- ✓ Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$
- ✓ Si $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$

Applications :

- 1) f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$
- 2) a) Montrer que pour tout réel x non nul, $\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$
 b) En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- 3) soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos x + 2x$. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

IV. Image d'un intervalle par une fonction continue :

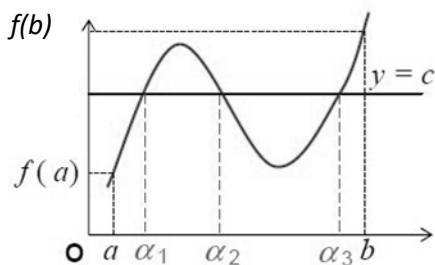
Rappels :

- ✓ l'image d'un intervalle par une fonction continue est
- ✓ **Théorème des valeurs intermédiaires :**

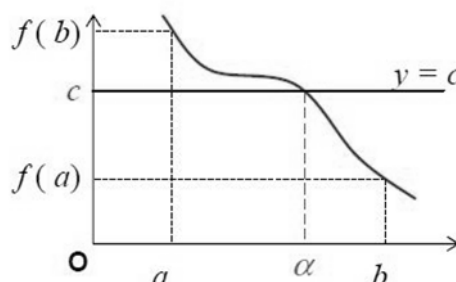
Soit f est une fonction continue sur un intervalle I . a et b deux réels de I tels que $a < b$
 Pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet aux moins une solution $\alpha \in [a, b]$

Corollaire 1

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors
 Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors α est



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle $[a ; b]$.
 L'équation $f(x) = c$ peut avoir plusieurs solutions



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a ; b]$.
 L'équation $f(x) = c$ admet une solution unique .

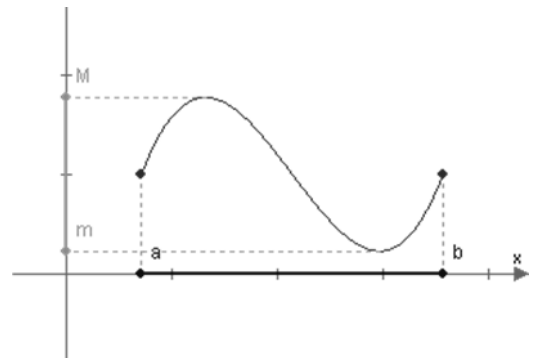
Corollaire 2

Si f est continue sur $[a, b]$ et ne s'annule pas alors

* **Application : Activité 5 page 13**

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est



V. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Théorème 1 (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, b[$ (b fin ou infini)

Si f est croissante et majorée alors

Si f est croissante et non majorée alors

Si f est décroissante et minorée alors

Si f est décroissante et non minorée alors

Théorème 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; a et $b \in \mathbb{R} / a < b$

I	si f est strictement croissante alors $f(I) =$	si f est strictement décroissante alors $f(I) =$
$[a, b]$		
$[a, b[$		
$]a, b]$		
$]a, b[$		
$[a, +\infty[$		
$] -\infty, b[$		
$\mathbb{R} =] -\infty, +\infty[$		

Exemple : $f(x) = \tan x ; I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[; f(I) = ?$

* **A faire :** Exercices 26 et 24 page 22 + QCM et Vrai ou Faux p18