Exercice n°1

On considère dans un plan orienté un losange $ABCD$ de centre O tel que

$(\overrightarrow{AB};\widehat{\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $I = S_A(B)$.

1- a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en C et B en D

b- Caractériser f.

2- Soit g l'antidéplacement qui envoie A en C et B en D

a. Montrer que : $g = S_{(CD)} \circ f$

b. On pose : $O' = g(O)$. Montrer que O' est le projeté orthogonal de C sur (AD)

c. Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera

3- Soit S la similitude directe qui envoie B en D et D en I

a- Déterminer le rapport et l'angle de S .

b- Soit H le centre de S. Montrer que H est le milieu de $[AB]$

4- Soit σ la similitude indirecte qui envoie B en D et D en I

a. Montrer que le centre Ω de σ est un point de la droite (AB)

b- Montrer que : $\sigma = S_{(DI)} \circ S$ puis construire : $H' = \sigma(H)$.

c- Montrer que : $\Omega \in (DH')$ puis construire Ω et l'axe de σ

5- Soit $\varphi = g \circ \sigma^{-1} \circ S \circ f$

a- Caractériser : $\sigma^{-1} \circ S$

b- Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(D)$ puis caractériser : φ

Exercice n°2

1. On considère l'équation (E) : $27x + 53y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b. Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

c. Quelle est l'inverse de 27 modulo 53 ?

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Prouver que si ab $\equiv 0[53]$ alors a $\equiv 0[53]$ ou b $\equiv 0[53]$.

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1[53]$ alors a $\equiv 1[53]$ ou a $\equiv -1[53]$.

3. On désigne par R l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 52.

a. Prouver que pour tout entier $p \in R$ il existe un unique entier $q \in R$ tel que $pq \equiv 1[53]$.

b. Déterminer tous les entiers $p \in R$ tels que $p^2 \equiv 1[53]$.

c. Montrer que $52! \equiv -1[53]$.

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par $f(x) = \sqrt{1-e^{x-2}}$ et on désigne par ζ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Montrer que $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)}{x-2} = -\infty$ et interpréter le résultat.

b- Dresser le tableau des variations de f.

c- Montrer que f est une bijection de $]-\infty, 2]$ sur un intervalle I qu'on déterminera.

d- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$. On note Γ sa courbe représentative.

e- Tracer ζ et Γ dans le même repère.

2) a- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]-\infty, 2]$.

b- Prouver que la suite (α_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) Soit $F(x) = x\ln(1-x^2) + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a- Vérifier que F est une primitive de f^{-1} sur l'intervalle $[0,1[$.

b- Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \alpha_n$ et $x = 2$. Montrer que $A_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) - \dfrac{2}{n}$.

c- Pour quel valeur de n l'aire A_n est maximal ?