Exercice n°1

Soit $\theta \in \left]0 \, , \, \pi\right[$; *on pose*: $t = e^{2i\theta}$; $u = t^3 - 1$; $v = t - 1$ *et* $w = 1 + t + t^2$

1) montrer que $\forall x \in IR$; $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$
2) montrer que : $v \neq 0$ *et* $w = \frac{u}{v}$ et déduire que $w = (1 + 2\cos 2\theta)e^{2i\theta}$

   Déterminer θ pour que w soit imaginaire pur
3) Soit A, M *et* N les points du plan d'affixes respectives $1, \; t$ *et* t^3
   a) Pour quelles valeurs de θ les points A, M *et* N sont alignés
   b) Pour quelles valeurs de θ le triangle AMN est isocèle et rectangle en A
4) Montrer que le triangle AMN est équilatéral $\Leftrightarrow |w| = 1$ *et* $|t+1| = 1$

Exercice n°2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 2AC$ *et* $\left(\overrightarrow{AB} \, , \, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Voir annexe 2 On pose I le milieu du segment $[AB]$. On note D le point tel que : $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On considère la similitude indirecte S telle que $S(A) = B$ *et* $S(C) = A$

1) Déterminer le rapport de S
2) Soit Ω le centre de S , montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à D
3) Construire $D' = S(D)$
4) Soit Δ la médiatrice de $[AD]$, vérifier que $\Omega \in \Delta$ et que Δ est l'axe de S
5) On rapporte le plan au repère orthonormé $\left(A \, , \, \overrightarrow{AI} \, , \, \overrightarrow{AC}\right)$
   a) Déterminer l'écriture complexe de S
   b) En déduire l'affixe de Ω et une équation de Δ

Exercice n°3

1) On considère l'équation $(E) : 11x - 7y = 5$ ou x *et* y *de* Z
   a) justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u \, , \, v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple
   b) en déduire une solution particulière de l'équation (E)
   c) résoudre l'équation (E)
   d) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O \, , \, \vec{i} \, , \, \vec{j}\right)$, on considère la droite Δ d'équation $11x - 7y = 5$. On note ζ l'ensemble des points $M(x \, , \, y)$ du plan tels

que $0 \leq x \leq 50$ *et* $0 \leq y \leq 50$. déterminer le nombre de points de la droite Δ appartenant à l'ensemble ζ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2) On considère l'équation $(F): 11x^2 - 7y^2 = 5$ ou x *et* y *de* Z
   a) Démontrer que si le couple $(x\ ,\ y)$ solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$
   b) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3
Modulo 5, x^2 est congru à				

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3
Modulo 5, y^2 est congru à				

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $5y^2$ par 5 ?

   c) En déduire que si le couple $(x\ ,\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ,\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on déduire pour l'équation (F).

Exercice n°4

On considère les équations différentielles $(E_0): 2y' - y = 0$ *et* $(E_1): 2y' - y = e^{\frac{x}{2}}$

1) a) résoudre l'équation différentielle (E_0)
   b) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2} x e^{\frac{x}{2}}$ est une solution de (E_1)
   c) Montrer qu'une fonction f est une solution de (E_1) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0)
   d) En déduire les solutions de (E_1)

2) Déterminer la solution f de (E_1) tel que $f(0) = \frac{1}{2}$

3) Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$
   a) Etudier les variations de f sur IR
   b) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ et soit V le volume de solide engendrer par la rotation de l'arc $C = \{M(x\ ,\ y) \textit{tels que } -1 \leq x \leq 0 \textit{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ autour de l'axe des abscisses. Calculer V