Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ *a)* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

❷ *a)* Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

❸ *a)* Monter que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f''(x)$.

b) Montrer que le point $A(0\,,\,1)$ est un point d'inflexion à $\mathscr{C}$.

❹ Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $0 < \alpha < 0,5$.

❺ Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

❻ *a)* Montrer que la fonction f posséde des primitives sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 2.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-3}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ *a)* Calculer $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

❷ *a)* Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et que $f'(x) = \dfrac{-16}{(x-3)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

❸ Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

❹ *a)* Monter que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, 3[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(-3)$.

c) Monter que pour tout réel y appartenant à l'intervalle J, $f^{-1}(y) = \dfrac{-3y-1}{-y+5}$.

Exercice 3

I/ Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2x - 2$.

❶ *a)* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$.

b) Justifier que g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

❷ *a)* Monter que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
Vérifier que $2,6 < \alpha < 2,8$.

b) En déduire le signe de la fonction g pour tout $x \in [1, +\infty[$.

$II/$ Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1 *a)* Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 *a)* Justifier que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3 *a)* Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, on a $f(x)=x+2+\dfrac{3}{x-1}$.

b) Soit D la droite d'équation $y=x+2$.
Monter que la droite D est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

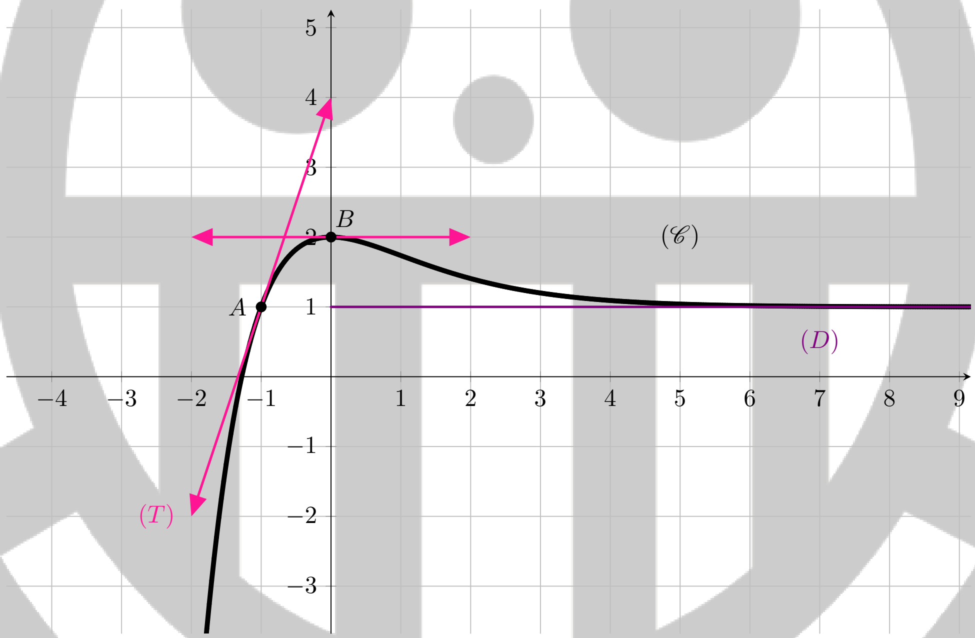
c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que ses asymptotes.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. La courbe $\mathscr{C}$ est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente (T) au point $A(-1,1)$ et une tangente horizontale au point $B(0,2)$.
- La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.
- La droite (D) d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1 *a)* Déterminer D_f ; $f(-1)$ et $f(0)$.

b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(-1)$.

2 *a)* Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente (T).

3 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

4 *a)* Dresser le tableau de variation de f

b) Dresser le tableau de signe de f.

5 Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
$f(x)=0$; $f(x)=1$; $f(x)=3$ et $f(x)=-5$.