Série N°10

Niveau: 4 Sc.Exp

Prof: Nefzi Chokri

Nombres complexes

2020/2021

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1-i$, -2 et $2+2i$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.
3. Déterminer l'affixe du point D pour que $ABDC$ soit un carré.

Exercice 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}-i$ et $Z = z_1 z_2$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et Z.
2. Donner l'écriture cartésienne de Z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1. a) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes z_A et z_B.
   b) Placer les points A et B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
2. On désigne par M le point d'affixe $z_M = z_A + z_B$.
   a) Montrer que le quadrilatère $OAMB$ est un carré puis placer le point M.
   b) Donner l'écriture trigonométrique de z_M.
   c) Donner alors les valeurs exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 4

1. Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.
   Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = (1+i)e^{i\theta}$ et $z_2 = (1-i)e^{i\theta}$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $2e^{i\theta}$, z_1 et z_2.
   a) Montrer que A est le milieu du segment $[M_1M_2]$.
   b) Vérifier que $\frac{z_1}{z_2} = i$ et déduire que OM_1BM_2 est un carré.

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 2, $1-e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. a) Montrer que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

(b) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

(2) (a) Calculer $\frac{z_B}{z_C}$ et en déduire que $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$.

(b) Montrer que $OBAC$ est un rectangle.

Exercice 6

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = e^{i\theta} + 1$ et $z_N = e^{i\theta} - 1$, où θ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

(1) Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

(2) (a) Montrer que $\frac{z_N}{z_M} = i \tan \frac{\theta}{2}$.

(b) Déduire la nature du triangle ABC.

(3) Déterminer l'ensemble décrit par le point M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

(1) (a) Donner la forme exponentielle de a.

(b) Construire le point A.

(2) Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$.

(a) Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.

(b) Montrer que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

(c) Placer le point B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(3) Soit θ un argument du nombre complexe b.
Montrer que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

Exercice 8

(1) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1$.
Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

(2) Pour tout point M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+i}{z-i}$.
Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' est réel.

(3) (a) Montrer que $|z'| = \frac{CM}{AM}$.

(b) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AC]$, le point M' décrit un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

Exercice 9

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

(1) (a) Ecrire z_1 sous forme algébrique.

ⓑ Ecrire z_2 sous forme exponentielle.

② Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=\sqrt{2}z_1$ et $z_B=i\overline{z_2}$.

ⓐ Montrer que le triangle OAB est isocèle.

ⓑ Ecrire $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme cartésienne puis sous forme exponentielle. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$.

ⓒ Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

③ Pour tout point $M(z)\in\mathscr{P}\setminus\{B\}$, on associe le point $M'(z')$ telle que $z'=\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$.

ⓐ Déterminer l'ensemble E des points M lorsque M' décrit l'axe $(O,\vec{u})$.

ⓑ Déterminer l'ensemble F des points M' lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On donne les nombres complexes $a=3+i\sqrt{3}$ et $b=-\sqrt{3}+3i$.

① Ecrire a et b sous forme exponentielle.

② ⓐ Placer les points A et B d'affixes respectives a et b puis le point C d'affixe $c=a+b$.

ⓑ Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

ⓒ En déduire que le quadrilatère $OACB$ est un carré.

③ ⓐ Justifier que $OC=2\sqrt{6}$ et que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$.

ⓑ Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

ⓒ Montrer que c^{12} est un réel négatif.

Exercice 11

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1-i$, $z_B=2+\sqrt{3}+i$ et $z_C=2$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre C et de rayon 2.

① ⓐ Vérifier que $B\in\mathscr{C}$.

ⓑ Placer les points A et C. Construire alors le point B.

② ⓐ Ecrire z_A sous forme exponentielle.

ⓑ Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique, en déduire que $\dfrac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ⓒ En déduire la forme exponentielle de z_B.

ⓓ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

③ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z|=|\overline{z}-1-i|$.

④ Pour tout point M d'affixe z $(z\neq 2)$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=-3i\left(\dfrac{z-1+i}{z-2}\right)$.

ⓐ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit réel.

ⓑ Montrer que $OM' = 3\dfrac{AM}{CM}$.

ⓒ En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$, le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

Exercice 12

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.
On désigne par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre respectives E et F et de même rayon 1.
Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

   ⓐ Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{FN}$.

   ⓑ Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur $\mathscr{C}_1$ et N varie sur $\mathscr{C}_2$.

   ⓒ Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2. Soit P le point d'affixe $z_P = (1 - i)\sin\theta\; e^{i\theta}$.

   ⓐ Montrer que $\dfrac{aff(\overrightarrow{EP})}{aff(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\dfrac{aff(\overrightarrow{FP})}{aff(\overrightarrow{FN})}$.

   ⓑ Montrer alors P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 13

1. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - \left(\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2}\right) z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$.

   ⓐ Vérifier que 2 est une solution de (E).

   ⓑ Déduire l'autre solution de (E).

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

   ⓐ Mettre z_B sous forme exponentielle.

   ⓑ Placer le point B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Soit C le point d'affixe $z_C = 2 + z_B$.

   ⓐ Placer le point C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   ⓑ Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

   ⓒ Montrer que $z_C = 2\cos\dfrac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}}$, en déduire que $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 14

1. Vérifier que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2e^{i\frac{\pi}{12}} z + (1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

   ⓐ Montrer que le quadrilatère $AOCB$ est un losange.

   ⓑ Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   ⓒ Calculer l'aire du losange $OACB$.