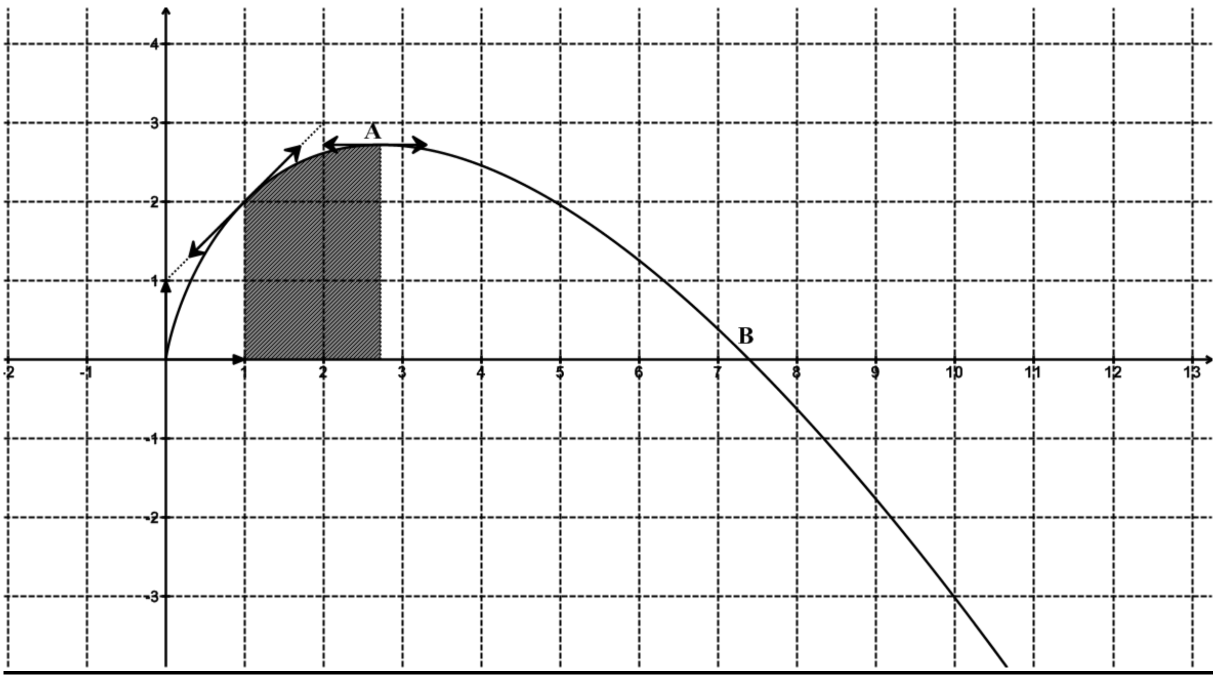
Exercice n°1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe ζ suivante d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \alpha.x + \beta.x\ln(x) & \text{xi } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ où α et β sont des constantes réelles.



1) a- Par lecture graphique ; Déterminer f(1) et $f\,'(1)$.
   b- En déduire les valeurs des réels α et β.
   c- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2) Au point A, la courbe ζ admet une tangente horizontale.
   a- Vérifier que le point A, a pour coordonnées (e,e).
   b- Dresser alors à partir du graphe le tableau des variations de la fonction f.
3) La courbe ζ coupe l'axe des abscisses au point B.
   a- Déterminer les coordonnées du point B.
   b- En déduire le signe de f(x) sur $[0,+\infty[$.
4) a- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e x.\ln(x)\,dx$.
   b- En déduire l'aire (en u.a) de la partie hachurée du plan.

Exercice n°2

1) Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par f(x) = - ln (1 + sin x)

a- Dresser le tableau de variations de f
b- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera
c- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout x de J, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$

2) Soit g la fonction définie sur $]-\ln 2,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$

a- Justifier que g est dérivable sur son domaine de définition et montrer que pour tout réel x de D_g

on a $g'(x) = \dfrac{e^x}{(\sqrt{2e^x - 1})^3}$

b- Dresser le tableau de variations de g

c- Tracer la courbe C_g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

d- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Cg) et les droites d'équations : y=0, x = 0 et x = ln2

<u>Exercice n°3</u>

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $((O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A(–i) et B(–2i)

A tout d'affixe $z \neq -2i$ on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+2}{iz-2}$.

1/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est imaginaire.

2/ a- Vérifier $z' + i = \frac{1-2i}{iz-2}$. En déduire que AM'×BM=$\sqrt{5}$.

b- Déterminer, alors l'ensemble des points M' tels que M décrit le cercle de centre B et de rayon.

3/ On suppose que $z \neq -i$ et $z \neq -2i$.

a- Monter que$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})[2\pi]$.

b- Déterminer, alors l'ensemble des points M', lorsque M se déplace sur le segment $]AB[$.

<u>Exercice n°4</u>

Soit l'équation (E_θ) : z^2 – (i + $e^{i\theta}$) z + (1 + $e^{i\theta}$) (–1 + i) = 0 où $\theta \in [0, \pi]$.

1) a- Vérifier que $z_1 = -1+i$ est une solution de (E_θ).

b- En déduire l'autre solution z_2 de l équation (E_θ).

2) a- Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

b- En déduire les solutions de l'équation (E'_θ) : z^4 – (i + $e^{i\theta}$)z^2 + (1 + $e^{i\theta}$) (–1 + i) = 0

3) Soit les points M_1 ,M_2 et M d'affixes respectives : –1 + i , 1 + $e^{i\theta}$ et i + $e^{i\theta}$

a- Déterminer l'ensemble des points M lorsque Θ varie dans [0, π]

b- Montrer que OM_1MM_2 est un parallélogramme.

c- Déterminer Θ pour que OM_1MM_2 soit un losange.